

L'exercice est composé de 2 parties indépendantes.

### Partie I :

On donne l'équation différentielle (E) :  $y' + y = (2x + 1)e^{-x}$ .

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle  $y' + y = 0$ .
2. Montrer que la fonction  $g(x) = (x^2 + x)e^{-x}$  est une solution de (E).
3. En déduire toutes les solutions de l'équation (E) dans  $\mathbb{R}$ .
4. Déterminer la solution  $f$  de (E) telle que  $f(0) = -1$ .

### Partie II :

On considère les fonctions  $f_k$  définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f_k(x) = (x^2 + x + k)e^{-x}$ , avec  $k$  un réel.

1. Dans cette question, on étudie le cas  $k = -1$ .
  - a. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_{-1}(x)$ .
  - b. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_{-1}(x)$  et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
  - c. Déterminer  $f'_{-1}(x)$ , la dérivée de la fonction  $f_{-1}(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - d. Étudier le sens de variation de la fonction  $f_{-1}$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - e. En déduire la tableau de variation de la fonction  $f_{-1}$  sur  $\mathbb{R}$ .  
Si nécessaire, déterminer la valeur des extremums.
  - f. Étudier la convexité de la fonction  $f_{-1}$  sur  $\mathbb{R}$ .  
Donner les abscisses des éventuels points d'inflexion.

2.a. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x)$ .

- b. Déterminer  $f'_k(x)$ , la dérivée de  $f_k(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .
- c. Déterminer le sens de variation de la fonction  $f_k$  en fonction de  $k$ .

*On ne demande pas la valeur des extremums.*

- d. Justifier que dans le cas où la fonction  $f_k$  n'est pas monotone, ses extremums sont sur la courbe de la fonction  $h(x) = (2x + 1)e^{-x}$ .