

Soit f la fonction définie sur $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$ par $f(x) = \frac{x^3 + 1}{4x^2 - 1}$.

1. On note g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 4x^3 - 3x - 8$.

a. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.

b. Dresser le tableau de variation de la fonction g sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty \right[$.

c. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; +\infty \right[$.

d. Déterminer un encadrement de α à 10^{-1} .

e. Donner le signe de g en fonction de x .

2.a. Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.

b. Déterminer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{xg(x)}{(4x^2 - 1)^2}$.

c. Dresser le tableau de variation de f sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty \right[$.

3.a. Montrer que $f(\alpha) = \frac{3}{8}\alpha$.

b. En utilisant l'encadrement de α de la question 1.d. donner un encadrement de $f(\alpha)$.