Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;4]$ par $f(x)=\dfrac{2+3x}{4+x}$

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$

On admet que cette suite est bien définie.

1) Calculer u_1.

2) Montrer que la fonction f est croissante sur $[0;4]$.

3) Montrer que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$

4) a) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

b) On appelle l la limite de la suite (u_n). Montrer l'égalité : $l=\dfrac{2+3l}{4+l}$

c) Déterminer la valeur de la limite l.

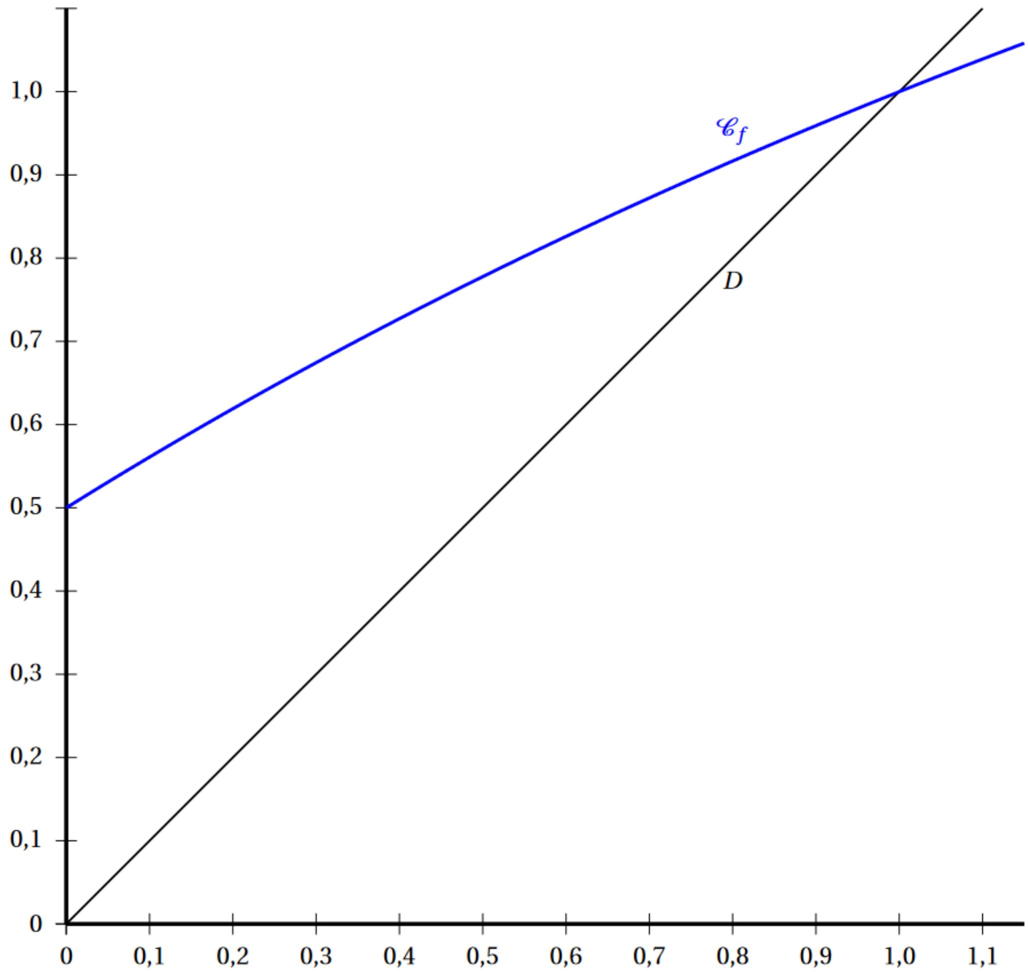
Partie B

On considère la suite (v_n) définie par : $v_0 = 0{,}1$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1}=f(v_n)$

1) On donne en Annexe la courbe représentative, C_f de la fonction f et la droite D d'équation $y=x$

Placer sur l'axe des abscisses par construction géométrique les termes v_1, v_2 et v_3 sur l'annexe.

Quelle conjecture peut-on formuler sur le sens de variation et le comportement de la suite (v_n) quand n tend vers l'infini ?



2) a) Montrer que pour tout entier naturel n, $1-v_{n+1}=\left(\dfrac{2}{4+v_n}\right)(1-v_n)$

b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant 1-v_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

3) La suite (v_n) converge t-elle ? Si oui, préciser sa limite.