Partie I :

La fonction f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x-2+\frac{1}{2}\ln x$

1) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$

2)a) Déterminer $f'(x)$. Quel est le signe de f' sur $]0;+\infty[$?

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f

3)a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$

b) Déterminer l'entier n tel que $\alpha \in]n;n+1[$

4) Déterminer le signe de f sur $]0;+\infty[$

Partie II :

La fonction g est définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ -\frac{7}{8}x^2+x-\frac{1}{4}x^2\ln x & \text{si } x>0 \end{cases}$

1)a) Montrer que la fonction g est continue en 0

b) Déterminer la limite de g en $+\infty$

2) Montrer que pour tout $x>0$, $g'(x)=xf\left(\frac{1}{x}\right)$

3)a) Montrer $g\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1+4\alpha}{8\alpha^2}$

b) Dresser le tableau de variation de la fonction g

4) Donner les équations des tangentes à la courbe $\mathcal{C}$ représentative de g au point d'abscisses 1 et $\frac{1}{\alpha}$

5) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x)$ et interpréter le résultat graphiquement

6) Représenter succinctement la courbe $\mathcal{C}$ et ses tangentes dans un repère orthonormé