On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1+\ln x}{x}$

On appelle C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

Partie I : On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x^2-2\ln x$

1) Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

2) Déterminer la fonction $g'(x)$, fonction dérivée de la fonction g.

3) Étudier le signe de g' et en déduire le tableau de variation de la fonction g .

4) Quel est le signe de g sur $]0;+\infty[$?

Partie II :

1) Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Quelle est la limite de f en $+\infty$?

b) Montrer que la droite (d) d'équation $y=\frac{x}{2}$ est asymptote à C_f.

c) Déterminer la position de C_f par rapport à (d).

Montrer, en particulier, que (d) coupe C_f en un point A que l'on déterminera.

3) a) Déterminer $f'(x)$ fonction dérivée de f et montrer que $f'(x)=\frac{g(x)}{2x^2}$

b) Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variation de la fonction f .

4) Montrer qu'il existe un point B, et un seul, de la courbe C_f où la tangente (T) à C_f est parallèle à (d) .

Préciser les coordonnées de B.

5) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α.

b) Justifier l'encadrement : $0{,}34 < \alpha < 0{,}35$.